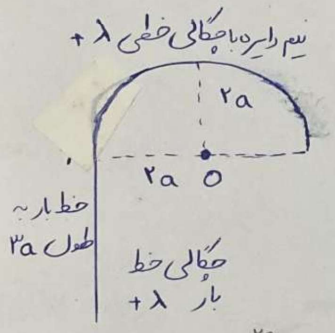
۱- مطابق شکل یک خط بار به طول محدود با چگالی خطی بار نشان داده شده در شکل داریم که در کنار یک نیم حلقه‌ای باردار با چگالی خطی بار نشان داده شده در شکل قرار دارد.

الف) مؤلفه های x و y میدان الکتریکی ناشی از خط بار به طول محدود را در نقطه O محاسبه کنید

ب) اندازه و جهت میدان الکتریکی ناشی از نیم حلقه‌ی باردار را در نقطه‌ی O محاسبه کنید

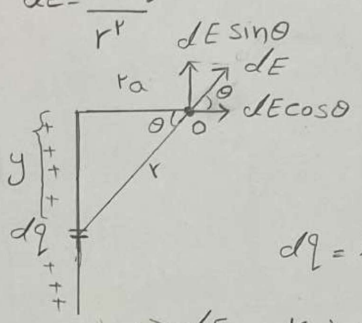
ج) مؤلفه های x و y میدان الکتریکی شکل داده شده (میدان برایند) را در نقطه O بنویسید (جواب ها برحسب λ ، k (ثابت الکترواستاتیک) و a نوشته شوند.

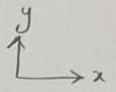


$$dE = \frac{k\,dq}{r^2}$$

جواب:

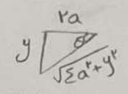
الف)





$$dE_x = \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta$$

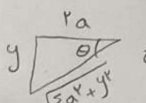
$$dq = \lambda\,dy \quad , \quad r = \sqrt{(2a)^2 + y^2}$$



$$\Rightarrow dE_x = \frac{k\lambda\,dy}{4a^2+y^2}\cos\theta \quad (1)$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{وتر}} = \frac{2a}{\sqrt{4a^2+y^2}} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} E_x = \int \frac{k\lambda\,dy}{4a^2+y^2}\,\frac{2a}{\sqrt{4a^2+y^2}} = 2ak\lambda\int\frac{dy}{(4a^2+y^2)^{3/2}} \quad (3)$$

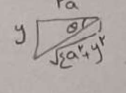


$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{ضلع مجاور } \theta} = \frac{y}{2a} \Rightarrow y = 2a\tan\theta \Rightarrow dy = 2a(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$

$$\Rightarrow dy = 2a\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)d\theta = \frac{2a}{\cos^2\theta}\,d\theta \quad (4)$$

$$(4a^2+y^2)^{3/2} = (4a^2+4a^2\tan^2\theta)^{3/2} = (4a^2(1+\tan^2\theta))^{3/2} = (4a^2)^{3/2}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow (4a^2+y^2)^{3/2} = \frac{8a^3}{\cos^3\theta} \quad (5)$$



$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{4a^2+y^2}}$$

$$\xrightarrow{(5),(4),(3)} E_x = 2ak\lambda\int\frac{\frac{2a}{\cos^2\theta}\,d\theta}{\frac{8a^3}{\cos^3\theta}} = \frac{k\lambda}{2a}\int\cos\theta\,d\theta = \frac{k\lambda}{2a}\boxed{\sin\theta}$$

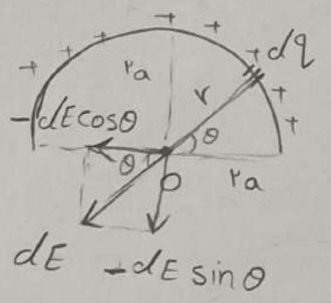
$$\Rightarrow E_x = \frac{k\lambda}{2a}\,\frac{y}{\sqrt{4a^2+y^2}}\Big]_0^{3a} = \frac{k\lambda}{2a}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\hat{i}$$

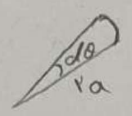
$$E_y = k\lambda \int \frac{dy}{4a^2+y^2} \sin\theta = k\lambda \int \frac{dy\,(y)}{(4a^2+y^2)^{3/2}} = k\lambda\left(-\frac{1}{\sqrt{4a^2+y^2}}\right)\Bigg]^{3}$$

$$\Rightarrow E_y = k\lambda\left(-\frac{1}{\sqrt{13}\,a} - \left(-\frac{1}{2a}\right)\right) = \frac{k\lambda}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{13}}\right)\hat{j}$$

$$E = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} = \frac{k\lambda}{a}\left(\frac{3}{2\sqrt{13}}\hat{i} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{13}}\right)\hat{j}\right)$$

ب)





اندازه کمان روبروی $d\theta \rightarrow 2a\,d\theta$

$$dq = \lambda(2a)\,d\theta = 2\lambda a\,d\theta$$

$$dE_x = -\frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = -\frac{k\,(2\lambda a\,d\theta)}{2\,4a^2}\cos\theta$$

$$E_x = -\frac{k\lambda}{2a}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta = -\frac{k\lambda}{2a}\sin\theta\Big]_0^{\pi} = -\frac{k\lambda}{2a}(0-0) = 0$$

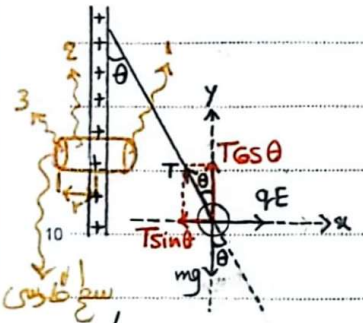
$$E_y = -\frac{k\lambda}{2a}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = +\frac{k\lambda}{2a}(+\cos\theta)\Big]_0^{\pi} = \frac{k\lambda}{2a}(-1-1) = \frac{k\lambda}{a}(-j)$$

ج)

$$E = E_{\text{خط}} + E_{\text{نیم دایره}} = \frac{k\lambda}{a}\left(\frac{3}{2\sqrt{13}}\hat{i} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{13}} - 1\right)\hat{j}\right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{k\lambda}{a}\left(\frac{3}{2\sqrt{13}}\hat{i} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{13}}\right)\hat{j}\right)$$

۴۱) در شکل 19 ـ 45 یک کره‌ی نارسانای به جرم $m=1kg$ و بار $q=3\times10^{-8}C$ (که به طور یکنواخت در حجم آن توزیع شده است) از یک نخ عایق آویزان است و با یک ورقه نارسانای قائم با بار یکنواخت (سطح مقطع آن نشان داده شده) زاویه $\theta=30^\circ$ می‌سازد. با در نظر گرفتن نیروی گرانشی وارد به کره و با فرض اینکه ورقه به طور قائم به سمت داخل و خارج صفحه تا فاصله‌های دور امتداد یابد. چگالی بار سطحی σ ورقه را محاسبه کنید. (منظور ورقه نامتناهی است)



یک محور مختصات برای کره در نظر می‌گیریم و نیروهای وارد بر کره را در هر راستا مشخص می‌کنیم. چون بار و ورقه هم نام هستند یکدیگر را دفع می‌کنند و کره در زاویه 30° سانت باقی می‌ماند. بنابراین برآیند نیروهای وارد بر آن باید در هر راستا صفر باشد. نیروهایی که به کره وارد می‌شود نیروی گرانشی به سمت پایین (mg)، نیروی ناشی از ورقه باردار به سمت راست (qE) و نیروی ناشی از کشش نخ عایق در راستای نخ (T) است. نیروی کشش نخ را به مؤلفه‌های x و y آن تفکیک می‌کنیم. حالا برآیند این نیروها را در راستای x و y به دست می‌آوریم:

$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow qE-T\sin\theta=0 \Rightarrow T\sin\theta=qE \quad (1)$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow T\cos\theta-mg=0 \Rightarrow T\cos\theta=mg \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{T\sin\theta}{T\cos\theta}=\frac{qE}{mg} \Rightarrow \tan\theta=\frac{qE}{mg} \quad (3)$$

میدان ناشی از ورقه با استفاده از قانون گاوس به دست می‌آید. سطح گاوسی را یک استوانه عمود بر ورقه در نظر می‌گیریم:

$$\varepsilon_0\oint E\cdot dA=q \Rightarrow \varepsilon_0\oint_1 E\,dA\cos 0+\varepsilon_0\oint_2 E\,dA\cos 90+\varepsilon_0\oint_3 E\,dA\cos 0=q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 E\oint_1 dA+\varepsilon_0 E\oint_3 dA=\sigma A \Rightarrow \varepsilon_0 EA+\varepsilon_0 EA=\sigma A \Rightarrow 2\varepsilon_0 E=\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (4)$$

③,④ $\Rightarrow \tan\theta = \frac{q}{mg}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma = \frac{2\varepsilon_0 mg \tan\theta}{q}$

σ به دست آمد. مقادیر داده شده را در آن جایگذین می کنیم:

$m = 1\ kg$

$q = 3\times10^{8}\ C$

$\theta = 30^\circ$

$g = 9{,}8\ \frac{N}{kg}$

$\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\ \frac{C^2}{N\cdot m^2}$

$$\sigma = \frac{2\times8{,}85\times10^{-12}\ \frac{C^2}{N\cdot m^2}\times1\ kg\times9{,}8\ \frac{N}{kg}\times\tan30}{3\times10^{8}\ C}$$

$$\sigma = 5\times10^{-9}\ \frac{C}{m^2}$$

با این تدریس چگالی بار سطحی σ ورقه را به این مسئله محاسبه کردیم.

۱) مطابق شکل، یک کره توپر به شعاع $a=2cm$ با یک پوسته کروی رسانا به شعاع داخلی $b=2a$ و شعاع خارجی $c=2.4a$ هم مرکز است. بار خالص درون کره $q_1=5fC$ (با توزیع یکنواخت) و بار پوسته $q_2=-q_1$ می‌باشد. اندازه میدان الکتریکی را در فاصله شعاعی (الف) $r=0$، (ب) $r=\frac{a}{2}$، (ج) $r=a$، (د) $r=1.5a$، (هـ) $r=2.3a$ و (و) $r=3.5a$ به دست آورید. بار خالص روی (ز) سطح داخلی و (ح) سطح خارجی پوسته چقدر است.

$q_1=5\times10^{-15}C$; $q_2=-5\times10^{-15}C$

جواب) $a=0.02m$; $b=0.04m$; $c=0.048m$ $\quad k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\times10^9$

الف) میدان در $r=0$ برابر صفر است (تقارن)

ب) $r=\frac{a}{2}$ ← درون کره توپر

$$\int E\cdot dA=\frac{q}{\varepsilon_0}\ (1) \quad ; \quad q=\rho V\ (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} E(\cancel{4}\pi r^2)=\frac{\rho(\frac{\cancel{4}}{3}\pi r^3)}{\varepsilon_0} \Rightarrow E=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\ (3)$$

$$\rho=\frac{q_1}{V_{کره}}=\frac{q_1}{\frac{4}{3}\pi a^3}=\frac{3q_1}{4\pi a^3}\ (4)$$

$$\xrightarrow[r=\frac{a}{2}]{(4),(3)} E=\frac{\cancel{3}q_1(\frac{a}{2})}{4\pi a^3(\cancel{3}\varepsilon_0)}=\frac{(9\times10^9)\times(5\times10^{-15})(0.01)}{(0.02)^3}$$

ج) $r=a$ ← روی شعاع کره توپر

$$\int E\cdot dA=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(4\pi a^2)=\frac{q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=\frac{9\times10^9\times5\times10^{-15}}{(0.02)^2}$$

د) $r=1.5a$ ← $a<r<b$ (بین کره)

$$\int E\cdot dA=\frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2)=\frac{q_1}{\varepsilon_0}$$

$$E=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0(1.5a)^2}=\frac{9\times10^9\times5\times10^{-15}}{(1.5\times0.02)^2}$$

هـ) $r=2.3a$ ← $b<r<c$ ← داخل پوسته کروی

$E=0$ ⟶ چون داخل رسانا میدان صفر است

و) $r = 3.5a \rightarrow r > c$

$$\int E \cdot dA = \frac{q_{\phi}'}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0}$$

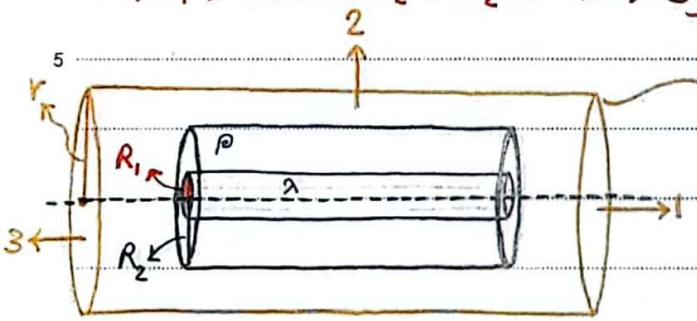
$$E = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \xrightarrow{q_2 = -q_1} E = 0$$

ز) با زدن سطح گاوس بدون پوسته رسانا صفر شدن میدان نتیجه می‌گیریم که بار مخالف بار کره یعنی بار $-q_1$ روی سطح داخلی پوسته القا می‌شود

ح) بار کل روی پوسته برابر با $(-q_1)$ است و روی سطح داخلی پوسته هم بار $(-q_1)$ القا شده است بنابراین بار روی سطح خارجی برابر صفر است.

$$\underbrace{-q_1 + (-q_1)}_{\text{بار روی سطح خارجی}} = -q_1 \Rightarrow \text{بار روی سطح خارجی} = 0$$

• بار الکتریکی مثبت با چگالی حجمی ρ در پوسته استوانه‌ای بی‌نهایت به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 به طور یکنواخت توزیع شده است. روی محور استوانه میله‌ای نازک به طور بی‌نهایت قرار دارد که بار الکتریکی با چگالی خطی λ به طور یکنواخت روی آن توزیع شده است. میدان الکتریکی را در $r < R_1$ ، $R_1 < r < R_2$ و $R_2 < r$ حساب کنید.



سطح گاوسی فرضی

یک سطح گاوسی استوانه‌ای در نظر گرفته و براساس قانون گاوس، میدان را برای میله و پوسته به طور جداگانه به دست می‌آوریم.

قانون گاوس: $\varepsilon_0 \oint E \cdot dA = q$

میدان میله: $\varepsilon_0 \oint E \cdot dA = q \Rightarrow \varepsilon_0 \oint_1 E\,dA\cos 90 + \varepsilon_0 \oint_2 E\,dA\cos 0 + \varepsilon_0 \oint_3 E\,dA\cos 90 = q$

$$\varepsilon_0 E \oint_2 dA = \lambda L \Rightarrow \varepsilon_0 E (2\pi r \cancel{L}) = \lambda \cancel{L} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

میدان پوسته: $\varepsilon_0 \oint E \cdot dA = q \Rightarrow \varepsilon_0 \oint_1 E\,dA\cos 90 + \varepsilon_0 \oint_2 E\,dA\cos 0 + \varepsilon_0 \oint_3 E\,dA\cos 90 = q$

$$\varepsilon_0 E \oint_2 dA = \rho V \Rightarrow \varepsilon_0 E (2\pi r \cancel{L}) = \rho(\cancel{\pi} R_2^2 - \cancel{\pi} R_1^2)\cancel{L} \Rightarrow E = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r}$$

• زمانی که $R_2 < r$ باشد، یعنی خارج از میله و پوسته، مجموع میدان‌های میله و پوسته در آن نقطه تأثیرگذار است. در نتیجه داریم:

$$E = E_{\text{میله}} + E_{\text{پوسته}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda + \rho\pi(R_2^2 - R_1^2)}{2\pi\varepsilon_0 r}} \ , \ \boxed{R_2 < r}$$

• وقتی $r < R_1$ باشد آنوقت فقط میدان ناشی از میله در آن نقطه تأثیرگذار است:

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}} \ , \ \boxed{r < R_1}$$

• هنگامی که $R_1 < r < R_2$ باشد، آنوقت به میدانی که r از R_1 فاصله می‌گیرد در حجم آن بار وجود دارد. در نتیجه مجموع بار میله و پوسته به شرطی که R_2 با r جایگزین شود میدان این نقاط است:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\rho(r^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0 r} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda + \rho\pi(r^2 - R_1^2)}{2\pi\varepsilon_0 r}} \ , \ \boxed{R_1 < r < R_2}$$

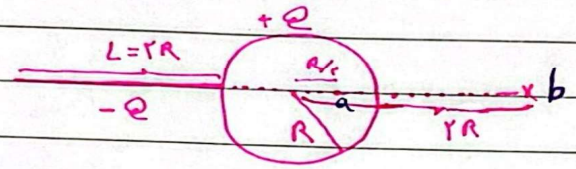
parsian

در شکل زیر بار الکتریکی $Q+$ به طور یکنواخت در حجم کره‌ی نارسانا به شعاع R توزیع شده است. میله‌ی نازک نارسانا به طول $L=2R$ نیز دارای بار $Q-$ است که با چگالی یکنواخت روی آن توزیع شده است.

الف) پتانسیل الکتریکی کل را (نسبت به مرجع بی‌نهایت) در مکان نقطه‌ی a که در امتداد محور x داخل کره و به فاصله‌ی $R/2$ از مرکز کره قرار دارد محاسبه کنید.

ب) پتانسیل الکتریکی کل را (نسبت به مرجع بی‌نهایت) در مکان نقطه‌ی b که در امتداد محور x به فاصله‌ی $2R$ از مرکز کره قرار دارد (مطابق شکل) محاسبه کنید.

پ) چه میزان کار لازم است تا بار نقطه‌ای $q+$ از مکان نقطه‌ی b به مکان نقطه‌ی a منتقل شود.



الف)

$$V_{\text{کل در } a} = V_{\text{خط در } a} + V_{\text{کره در } a}$$

برای کره

$$\begin{cases} E_{in} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad , \quad \rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\ E_{ext} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{برای کره} \begin{cases} E_{in} = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \\ E_{ext} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$

داخل کره

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q\, r^3/R^3}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{in} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}} \checkmark \qquad \frac{q_{in}}{Q} \Big| \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow q_{in} = \frac{Qr^3}{R^3}$$

بیرون کره

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_{ext} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

$$V_{\text{کره}}(a) = \int_a^\infty \bar{E}\cdot d\bar{r} = \int_{a=R/2}^{R} \bar{E}\cdot d\bar{r} + \int_R^\infty \bar{E}\cdot d\bar{r} =$$

$$\int_a^R \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,dr + \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\frac{1}{2}r^2\right)\Big|_a^R + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_R^\infty$$

$$= \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[R^2 - a^2\right] + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R} \xrightarrow{a = R/2}$$

$$\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\frac{3}{4}R^2\right] + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{3}{8}+1\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,\frac{11}{8}$$

$$V_{\text{کره}}(b) = \int_b^{\infty} \bar{E}\cdot d\bar{r} = \int_{b=2R}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr =$$

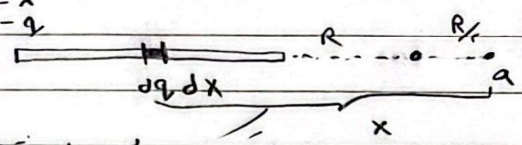
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{2R}^{\infty} = \boxed{\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}}$$

پتانسیل الکتریکی ناشی از خط باردار در نقطه‌ی a (نقطه‌ی b)

$L = 2R$

$-\lambda$

$-q$



$\lambda = \frac{q}{L}$

$$\boxed{dq = \frac{Q}{2R}dx} \Leftarrow \frac{dq}{Q} = \frac{dx}{2R}$$

پتانسیل جزئی توسط بار الکتریکی جزئی dq در نقطه‌ی a

$$dV = k\frac{dq}{x}$$

$$V_{\text{خط}}(a) = \int dV = \int k\frac{dq}{x} = \frac{kQ}{2R}\int\frac{dx}{x}$$

$$V_{\text{خط در } a} = \frac{kQ}{2R}\int_{x=\frac{3}{2}R}^{\frac{7}{2}R}\frac{dx}{x} = \frac{kQ}{2R}\ln x\Big|_{\frac{3}{2}R}^{\frac{7}{2}R}$$

$$V_{\text{خط در } a} = \frac{kQ}{2R}\ln\frac{\frac{7}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{kQ}{2R}\ln\frac{7}{3}$$

پتانسیل بار Q

$$\boxed{V_{\text{خط در } a} = \frac{kQ}{2R}\ln\frac{7}{3}} \checkmark$$

$$V_{\text{خط در } b} = \frac{k(-Q)}{2R}\ln x\Big|_{x=2R}^{x=5R} = \boxed{-\frac{kQ}{2R}\ln\frac{5}{3}}$$

الف) پتانسیل کل در a

$$V_{\text{کل}}(a) = V_{\text{خط در } a} + V_{\text{کره در } a} = -\frac{kQ}{2R}\ln\frac{7}{3} + \frac{kQ}{R}\,\frac{11}{8}$$

$$V_{\text{کل}}(a) = \frac{kQ}{2R}\left[\frac{11}{4} - \ln\frac{7}{3}\right] \checkmark$$

ب) پتانسیل کل در b

$$V_{\text{کل}}(b) = -\frac{kQ}{2R}\ln\frac{5}{3} + \frac{kQ}{2R} - \frac{kQ}{2R}\left[1 - \ln\frac{5}{3}\right]$$

ج)

$$W = q\Delta V = q(V_a - V_b)$$

$$= q\left[\frac{kQ}{2R} \times \frac{V}{4} + \frac{kQ}{2R} \ln \frac{5}{V}\right]$$

$$= \frac{kQq}{2R}\left[\frac{V}{4} + \ln \frac{5}{V}\right] \checkmark$$